Electrostática

Problema 1

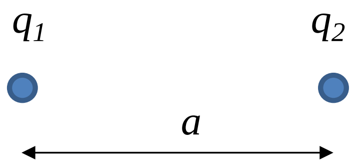
Dos cargas puntuales q_1= - 10 nC y q_2= +5 nC se hallan separadas por una distancia a=5 cm.

a) Determinar el o los puntos del espacio donde el campo generado por ellas es nulo.

b) ¿Cuál es el trabajo que se debe hacer para llevar una carga q_3=1μC desde el infinito hasta esos puntos? Discutir el resultado.

Solución:

a) Hagamos primero un esquema de la situación. Podemos escribir la expresión de la Ley de Coulomb para una carga puntual y aplicar el principio de superposición

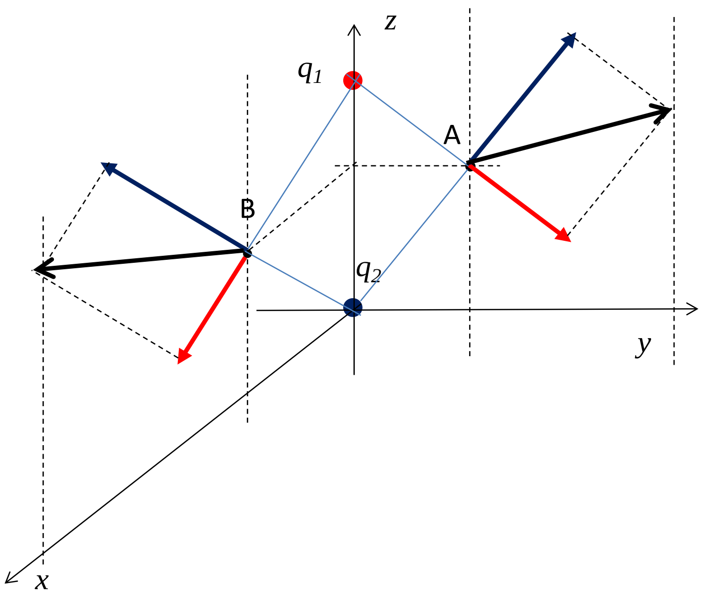


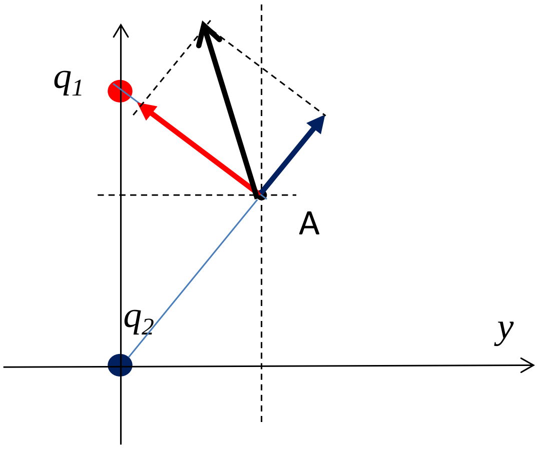
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1\left(\vec{r}-\vec{r}_1^{\,'}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1^{\,'}\right|^3} + \frac{q_2\left(\vec{r}-\vec{r}_2^{\,'}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2^{\,'}\right|^3}\right] \qquad (1)$$

Pero debemos primer hacer dos observaciones:

1: Para que cada variable de la ec.(1) tenga significado debemos establecer un sistema de coordenadas.

2. Antes de comenzar a operar matemáticamente, podemos tratar de hacer parte de la resolución "con los dedos", es decir, solo pensando…..Esto nos ayudará también a elegir qué sistema de coordenadas usar y a estimar si el resultado que obtengamos matemática es plausible. **Vamos a hacer un diagrama (no a escala) donde las dos cargas son positivas pero el *razonamiento* es el mismo para cualquier combinación de cargas (magnitud y signo).**

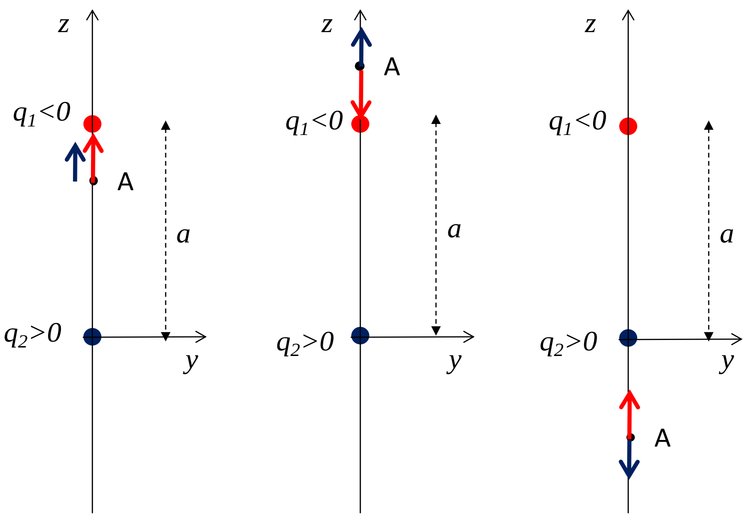




Vemos a partir de la figura que podemos calcular el campo eléctrico en el plano de la figura y luego generalizarlo a todo el espacio. ¿Por qué? Porque el problema planteado tiene simetría de revolución respecto a un eje que une las dos cargas. No significa esto que el campo sea igual (igual módulo, dirección y sentido) sino que todos los planos alrededor del eje *z* son equivalentes (Ver figura). Cada carga produce un campo radial respecto de ella y en cada punto sumamos los campos producidos por cada una. Esto es independiente de los valores de las cargas por lo que la figura representa un caso de dos cargas positivas. Entonces vamos a resolver el problema en el plano *yz*, por ejemplo.

Ahora es más fácil ver cómo podemos seguir simplificando el problema

Para que se anule el campo total en un punto A los campos generados por las cargas deben tener la misma dirección y distinto sentido en ese punto. Para que tengan la misma dirección, no queda otra posibilidad de que el punto esté sobre el eje *z*. Veamos las tres posibilidades



Más allá de que el dibujo no esté a escala, vemos que, en principio, habría solo dos posibilidades (que en nuestro sistema serían dos puntos $z_1 < 0$ y $z_2 > a$) para que en A el campo sea nulo. Pero ahora podemos restringir más a partir de los datos del problema: como $|q_1| > |q_2|$ y el campo disminuye con la distancia a la carga, vamos a tener que descartar la posibilidad del esquema central. En consecuencia, más allá de los resultados de la solución matemática, el único que tendrá sentido físico es aquél que corresponda a $z_1 < 0$.

Recién ahora resolveremos matemáticamente el problema. Con el sistema de coordenadas elegido, podemos escribir $\vec{r} = z\,\breve{e}_z \quad \vec{r}_1^{\,'} = a\,\breve{e}_z \quad \vec{r}_2^{\,'} = 0\,\breve{e}_z$. Reemplazando en la ec.(1)

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1\,(z-a)\,\breve{e}_z}{|z-a|^3} + \frac{q_2\; z\,\breve{e}_z}{|z|^3}\right] \tag{2}$$

Antes de especificar el valor de las cargas (aunque ya las hemos tenido en cuenta para establecer dónde podemos encontrar el punto de campo nulo), observemos que $(z-a)<0$ mientras que $|z-a|>0$. Lo mismo para z. Entonces,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q_1\;\breve{e}_z}{|z-a|^2} - \frac{q_2\;\breve{e}_z}{|z|^2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\left(-10\bullet 10^{-9}\mathrm{C}\right)\;\breve{e}_z}{|z-a|^2} - \frac{\left(5\bullet 10^{-9}\mathrm{C}\right)\;\breve{e}_z}{|z|^2}\right] =$$
$$= \frac{10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{(-10\;)}{|z-a|^2} - \frac{(5\;)}{|z|^2}\right]\breve{e}_z \tag{3}$$

Entonces

$$\frac{(10\;)}{|z_0-a|^2} = \frac{(5\;)}{|z_0|^2} \Rightarrow 2|z_0|^2 = |z_0-a|^2 \Rightarrow 2\;z_0{}^2 = (z_0-a)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,|z_0| = |z_0-a| \tag{4}$$

De esta manera podemos encontrar el punto donde se anula el campo:

$$\sqrt{2}\,(-z_0) = -(z_0-a) \Rightarrow \sqrt{2}\;z_0 = z_0 - a \Rightarrow z_0 = -\frac{a}{\sqrt{2}-1} = -\frac{a}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = -a\left(\sqrt{2}+1\right) \tag{5}$$

Una cosa importante: verificar que la solución es correcta: Reemplazando en ec.(3)

$$\vec{E}(z_0) = \frac{10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{(-10\;)}{|z_0-a|^2} - \frac{(5\;)}{|z_0|^2}\right]\breve{e}_z = -\frac{5\,10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(-2)}{\left|-a\left(\sqrt{2}+1\right)-a\right|^2} + \frac{1}{\left|a\left(\sqrt{2}+1\right)\right|^2}\right]\breve{e}_z =$$
$$= -\frac{5\,10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-\frac{2}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right]\breve{e}_z = -\frac{5\,10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right]\breve{e}_z = \tag{6}$$
$$= -\frac{5\,10^{-9}\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right]\breve{e}_z = 0$$

Bueno… hemos verificado que el campo es nulo en un solo punto del espacio:

b) Para averiguar el trabajo necesario para llevar una carga puntual q_3 desde muy lejos (el “infinito”, el lugar del espacio donde la carga no “sufre” el efecto de las cargas q_1 y q_2, vamos a usar la diferencia de potencial entre el infinito y ese punto z_0.

Como sabemos, el campo eléctrico está directamente relacionado con la fuerza que sufriría una carga de prueba (definida como puntual y positiva). Tengamos cuidado con el signo del trabajo y de la diferencia de potencial!

$$W_{\substack{\text{realizado por}\\ \text{"mi mano"}}} = \int_{\infty}^{z_0} \vec{F}_{\substack{\text{realizada por}\\ \text{"mi mano"}}} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{\infty}^{z_0} \vec{F}_{\substack{\text{realizada por}\\ \text{"el campo"}}} \cdot \overrightarrow{dl} = -q_3 \int_{\infty}^{z_0} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = q_3 \left(V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\right) \tag{7}$$

Y como el campo electrostático es conservativo, podremos elegir cualquier camino para llegar al punto z_0. Podemos aplicar el principio de superposición y aplicar para cada carga la expresión de la diferencia de potencial respecto del infinito:

$$V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\Big|_{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{\left|z_0 - a\right|}\right] \qquad V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\Big|_{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{\left|z_0\right|}\right] \tag{8}$$

$$V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\Big|_{q_1+q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{\left|z_0 - a\right|} + \frac{q_2}{\left|z_0\right|}\right] \text{ con } z_0 = -a\left(\sqrt{2}+1\right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\Big|_{q_1+q_2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-10\,\text{nC}}{\left|-a\left(\sqrt{2}+1\right)-a\right|} + \frac{5\,\text{nC}}{\left|-a\left(\sqrt{2}+1\right)\right|}\right] = \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{-2}{\left|\left(\sqrt{2}+1\right)+1\right|} + \frac{1}{\left|\left(\sqrt{2}+1\right)\right|}\right] = \\ &= \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{-2}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right] = \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{-2}{\sqrt{2}+2}\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right] = \\ &= \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{-2}{-2}\left(\sqrt{2}-2\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)\right] = \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[2\sqrt{2}+3\right] > 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Como q_3=1μC, reemplazando el resultado de la ec.(10) en la ec.(7)

$$\begin{aligned} W_{\substack{\text{realizado por}\\ \text{"mi mano"}}} &= q_3\left(V\left(z_0\right) - V\left(\infty\right)\right) = 3\mu\text{C}\frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 5\text{cm}}\left[2\sqrt{2}+3\right] = \\ &= \frac{3\cdot 10^{-6}\ 5\cdot 10^{-9}\ 9\cdot 10^{9}}{5\,10^{-2}}\left[2\sqrt{2}+3\right]\frac{\text{C}^2}{\text{m}}\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = 27\cdot 10^{-4}\left[2\sqrt{2}+3\right]\text{J} \approx 15{,}74\ \text{mJ} \end{aligned} \tag{11}$$

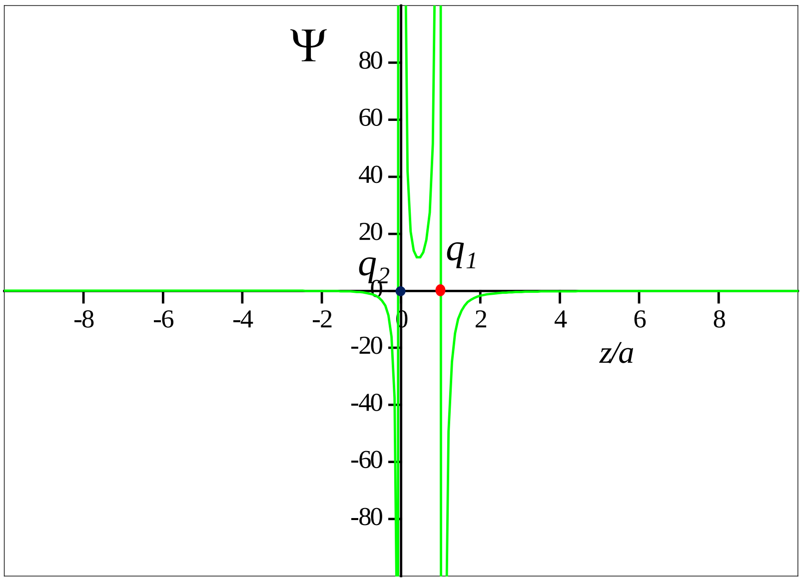
Es decir, para llevar a la carga positiva desde el infinito (donde el campo producido por q_1 y q_2 es nulo) hasta otro punto del espacio donde también el trabajo es nulo, debemos hacer trabajo. Para comprender qué pasa, dibujemos la componente *z* del campo en función de z/a

$$E_z\left(z\right) = \frac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{-2\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left|\frac{z}{a}-1\right|^3} + \frac{\frac{z}{a}}{\left|\frac{z}{a}\right|^3}\right] \tag{12}$$

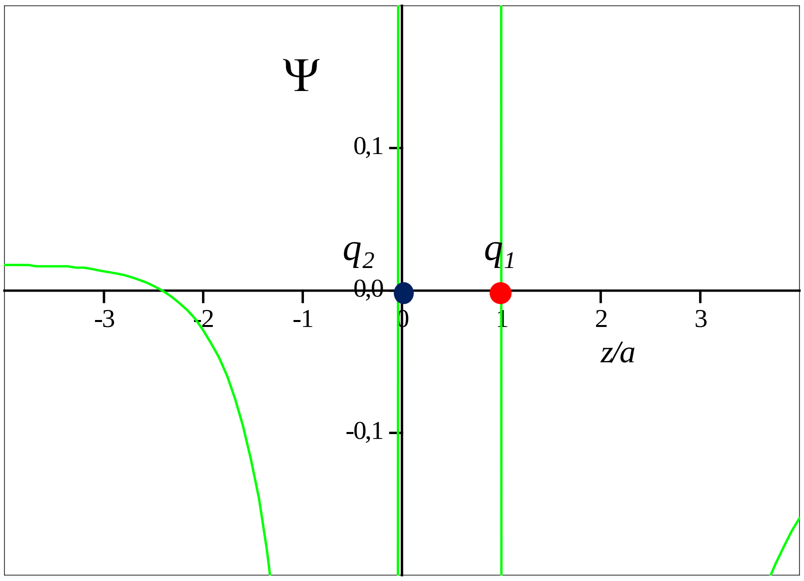
Solo para poder observar su variación con la coordenada *z* en forma más sencilla, definimos y graficamos la función $\Psi(z)$ definida como $\Psi(z)=\left[\dfrac{-2\left(\frac{z}{a}-1\right)}{\left|\frac{z}{a}-1\right|^3}+\dfrac{\frac{z}{a}}{\left|\frac{z}{a}\right|^3}\right]$

$$\Psi(z)\equiv\frac{E(z)}{\dfrac{5\text{nC}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}}=\frac{E(z)}{9\cdot10^9\,\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\,\dfrac{5\cdot10^{-9}\text{C}}{4\pi\varepsilon_0\left(5\cdot10^{-2}\text{m}\right)^2}}=\frac{E(z)}{\dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\dfrac{45\cdot10^4}{25}}=\frac{E(z)}{18000\,\dfrac{\text{N}}{\text{C}}}\tag{13}$$

Graficando la función $\Psi(z)$ observamos que el campo diverge donde están las cargas (lo que es de esperar), que la componente *z* es positiva entre las cargas, es negativa cerca de las cargas pero no llega a verse el resultado obtenido en a). Esto es un problema de escalas.



Lo que vamos a hacer es un zoom alrededor de $z_0=-2,41\,a$.



Observemos que la componente *z* cambia de signo cerca de $z_0=-2,41\,a$. Así entre $-\infty$ y z_0 la componente *z* es positiva, por lo que para traer una carga positiva q_3 desde el infinito, deberé "hacer fuerza" o, dicho correcta-mente, deberé vencer al campo realizando trabajo.